



**III ENCONTRO NACIONAL
I ENCONTRO LATINO-AMERICANO**
Gramado, RS, 4 a 7 de julho de 1995

**FLUXO DE CALOR TRANSIENTE EM PAREDES
EXTERNAS MULTICOMPOSTAS**

Paulo O. Beyer, Horácio A. Vielmo e Marco T.M.B. de Vilhena
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS
Rua Sarmento Leite, 425, 90050-170, Porto Alegre, RS
F. (051)2281633, R. 3255, Fax (051)2260321, E-mail: vielmoh@vortex.ufrgs.br

RESUMO

Apresenta-se uma metodologia analítica para cálculo do fluxo de calor unidimensional transiente através de paredes multicompuestas externas de edificações, sujeitas à convecção e radiação solar. O método baseia-se na aplicação da Transformada de Laplace com inversão por Quadratura Gaussiana. Os resultados são comparados com os métodos numéricos dos Volumes Finitos, que é também aqui descrito, e da Função de Transferência, comumente utilizado em cálculos de ar condicionado. A metodologia analítica aqui desenvolvida apresenta como característica principal o fato de não necessitar incrementos sequenciais no espaço e no tempo.

ABSTRACT

It is presented an analytical methodology to calculate the unidirectional transient heat flux through multilayered external walls of buildings, with convection and solar radiation. The Laplace Transform technique with numerical inversion based on Gaussian Quadrature is applied. The results are compared with the numerical methods of Finite Volumes, which is here described too, and the Transfer Function Method, commonly employed in the context of air conditioning. The principal characteristic of the analytical methodology presented here is that there is no need to do sequential increments in the time and in the position.

PALAVRAS-CHAVE

Calor fluxo, transiente, parede

INTRODUÇÃO

© O desempenho térmico do envoltório de edificações tem participação importante no conforto térmico e no consumo de energia no caso de utilização de condicionamento artificial. O envoltório das edificações está normalmente em processo transiente de transferência de calor, seja em resfriamento ou aquecimento. Este cálculo transiente tem como principal forma de realização, no caso de condicionamento artificial, o Método da Função de Transferência, (ASHRAE, 1989; Mitalas, 1968 e 1972). Este método necessita um cálculo prévio do fluxo transiente de calor através de métodos numéricos, para depois encontrar a Função de Transferência. Nas duas etapas existe a necessidade inerente aos métodos numéricos de incrementos sequenciais nas coordenadas espacial e temporal. O incremento temporal existe inclusive quando já se conhece a função de transferência.

O objetivo aqui buscado é o de desenvolver uma metodologia analítica que calcule o fluxo transiente de calor em paredes multicompuestas, independente da necessidade de incrementos sequenciais no espaço e no tempo. Visando futuras soluções bidimensionais os mesmos problemas são também resolvidos pelo método numérico dos Volumes Finitos, conforme descrito por Patankar, 1980. Comparações também são feitas com o Método da Função de Transferência, disponíveis apenas em aproximações unidimensionais.

Num trabalho anterior Beyer e Vilhena, 1993, apresentaram a solução deste problema com a aproximação de não considerar uma condição inicial para cada dia de cálculo. Noutro trabalho Beyer e Vilhena, 1994, introduziram a condição inicial, melhorando os resultados numéricos, mas considerando como função excitação

um polinômio com simples precisão, o que ainda acarretou alguns erros nos resultados. Uma função excitação mais elaborada é introduzida no presente trabalho, juntamente com o desenvolvimento do cálculo numérico.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Seja uma parede multicomposta conforme mostrado na figura 1. Ela possui diversos meios i , sendo que i varia de 1 até M . Neste trabalho a atenção é voltada para paredes externas de edificações, que tem no lado externo uma temperatura $T_a(t)$ chamada sol-ar, função cíclica diária que será posteriormente analisada e um coeficiente de troca de calor por convecção conhecido. Considera-se que o interior da edificação está à uma temperatura fixa, sendo também conhecido o coeficiente de troca por convecção. A resistência térmica de contato entre dois meios i pode ser finita ou igual a zero, representando um contato físico perfeito entre eles.

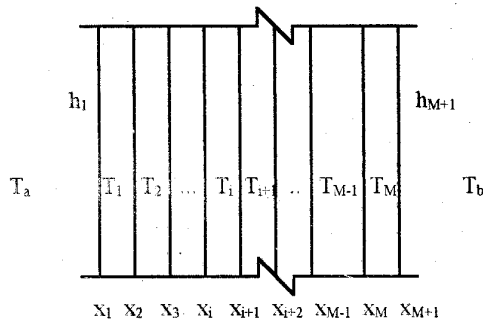


Figura 1; Parede multicomposta

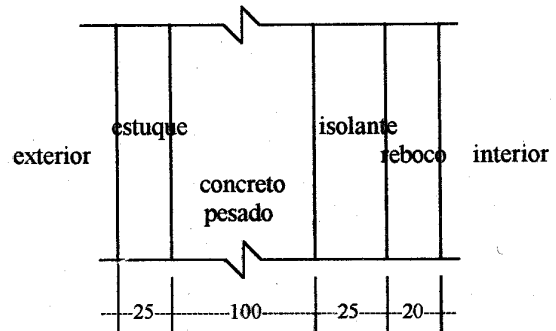


Figura 2; Parede resolvida como exemplo

A equação da condução do calor, em forma transiente e uma dimensão, pode ser escrita assim:

$$\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}, \quad \begin{matrix} x_i < x < x_{i+1} \\ i = 1, 2, \dots, M \\ t > 0 \end{matrix} \quad (1a)$$

sujeita às seguintes condições de contorno e interfaces:

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = h_1 (T_a - T_1) \quad x = x_1, \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$-k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = h_{i+1} (T_i - T_{i+1}) \quad x = x_{i+1} \quad (1c1)$$

$$T_i = T_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, M-1 \quad (1c2)$$

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \quad t > 0 \quad (1d)$$

$$k_M \frac{\partial T_M}{\partial x} = h_{M+1} (T_b - T_M) \quad x = x_{M+1}, \quad t > 0 \quad (1e)$$

e sujeita à seguinte condição inicial:

$$T_i(x,t) = T_{oi}(x), \dots \quad \begin{matrix} t = 0, x_i < x < x_{i+1} \\ i = 1, 2, \dots, M \end{matrix} \quad (1f)$$

Pode-se escolher entre as condições (1c1), existência de resistência de contato, e (1c2), contato térmico perfeito. A condição inicial $T_{oi}(x)$ é uma função que deve ser ajustada conforme a distribuição de temperaturas na parede ao fim de cada dia, condição inicial para o dia seguinte.

A condição de contorno externa é de troca de calor por convecção. Nesta troca deve estar incluído o efeito da radiação solar, o que é feito com a introdução de uma temperatura fictícia chamada temperatura sol-ar, segundo descrita pela ASHRAE, 1989.

MÉTODO ANALÍTICO DE SOLUÇÃO

O problema acima descrito bem como a aplicação da Transformada de Laplace a seguir podem ser encontrados nos textos básicos de Transferência de Calor (Özsisik, 1980).

Aplicando a Transformada de Laplace à equação básica do problema (1a) vem:

$$\frac{d^2 \bar{T}_i(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{T}_i(x, s) = -\frac{T_{oi}(x)}{\alpha_i} \quad (2a)$$

Nesta equação $\bar{T}_i(x, s) = L\{T_i(x, t); t \rightarrow s\}$, onde L é o operador Laplace. Aplicando a Transformada de Laplace às condições de contorno vem:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{d\bar{T}_1}{dx} + h_1 \bar{T}_1 &= h_1 \bar{T}_a \dots \dots \bar{T}_i = \bar{T}_{i+1} \dots \dots k_i \frac{d\bar{T}_i}{dx} = k_{i+1} \frac{d\bar{T}_{i+1}}{dx} \\ -k_i \frac{d\bar{T}_i}{dx} &= h_{i+1} (\bar{T}_i - \bar{T}_{i+1}) \dots \dots k_M \frac{d\bar{T}_M}{dx} + h_{M+1} \bar{T}_M = h_{M+1} \frac{T_b}{s} \end{aligned} \quad (2b)$$

- A solução da equação (2a) é tomada da forma:

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(x, s) &= A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x) + \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i \alpha_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) (a_i + b_i x) dx \\ &\quad - \frac{\exp(R_i x)}{2R_i \alpha_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) (a_i + b_i x) dx \end{aligned} \quad (3)$$

Nesta equação R_i vale $\sqrt{s/\alpha_i}$ e a distribuição inicial de temperaturas $T_{oi}(x)$ é tomada como retas $a_i + b_i x$. As exponenciais constantes da equação formam uma base para uma solução apropriada. A integração da equação (3) resulta em:

$$\bar{T}_i(x_i, s) = A_i(s) \exp(-R_i x_i) + B_i(s) \exp(R_i x_i) \quad (4a)$$

$$\bar{T}_i(x_{i+1}, s) = A_i(s) \exp(-R_i x_{i+1}) + B_i(s) \exp(R_i x_{i+1}) + I_i(x_{i+1}) / 2\alpha_i R_i \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} I_i(x_{i+1}) &= (\alpha_i / R_i) [2 - \exp(R_i x_i) \exp(-R_i x_{i+1}) - \exp(-R_i x_i) \exp(R_i x_{i+1})] + (b_i / R_i) [2x_{i+1} - \\ &\quad \exp(R_i x_i)(x_i - 1/R_i) \exp(-R_i x_{i+1}) - \exp(-R_i x_i)(x_i + 1/R_i) \exp(R_i x_{i+1})] \end{aligned} \quad (4c)$$

Estas equações devem ser colocadas junto com suas derivadas nas condições de contorno para encontrarem-se as constantes A_i e B_i . As derivadas ficam:

$$d\bar{T}_i(x_i, s) / dx = -R_i A_i(s) \exp(-R_i x_i) + R_i B_i(s) \exp(R_i x_i) \quad (5a)$$

$$d\bar{T}_i(x_{i+1}, s) / dx = -R_i A_i(s) \exp(-R_i x_{i+1}) + R_i B_i(s) \exp(R_i x_{i+1}) + Id_i(x_{i+1}) / 2\alpha_i R_i \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} Id_i(x_{i+1}) &= b_i [(2/R_i) + \exp(R_i x_i)(x_i - 1/R_i) \exp(-R_i x_{i+1}) - \exp(-R_i x_i)(x_i + 1/R_i) \exp(R_i x_{i+1})] + \\ &\quad \alpha_i [\exp(R_i x_i) \exp(-R_i x_{i+1}) - \exp(-R_i x_i) \exp(R_i x_{i+1})] \end{aligned} \quad (5c)$$

Colocando-se as equações acima nas condições de contorno pode-se montar um sistema linear para obtenção dos coeficientes A_i e B_i , obtendo-se:

$$MC(2M, 2M) * MI(2M, 1) = MT(2M, 1) \quad \text{onde} \quad (6)$$

MC é a matriz dos coeficientes, função de k, R, h, x , MI a matriz das incógnitas A_i e B_i e MT a matriz dos termos independentes, função de h, T, x, α, R, k .

Este sistema linear tem a variável s complexa participando do cálculo dos coeficientes A_i e B_i . Estes coeficientes devem ser colocados nas equações (4) e a função $T_i(x,t)$, solução do problema (1a), é encontrado pela fórmula de inversão da Transformada de Laplace. Neste trabalho utiliza-se o cálculo desta integral de inversão por Quadratura Gaussiana, substituindo-se a variável complexa s pelos valores dos pontos da Quadratura.

A solução do problema (4) é feita pelo retorno do domínio s para o domínio t , através da integral de inversão:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(st) \bar{T}_i(x,s) ds \quad (7)$$

Fazendo $st = p$ para obter uma integral definida sem o parâmetro t no termo exponencial, que é a função peso, introduzindo $c = c/t$, utilizando a fórmula de Quadratura Gaussiana apropriada segundo Heydarian e Mullineaux, 1981, e trabalhando com a função a ser invertida vem:

$$T_i(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(p) \frac{\bar{T}_i(x, p_k/t)}{t} dp = \sum_{k=1}^n A_k(p_k/t) \bar{T}_i(x, p_k/t) \quad (8)$$

Pode-se então calcular $T_i(x,t)$ substituindo-se s por p_k/t , o que é feito no sistema (6). Os termos A_k e p_k podem ser encontrados para até $n = 30$ em Stroud e Secrest, 1966. Normalmente $n = 8$ apresenta bons resultados. Neste trabalho utiliza-se $n = 8$. A substituição $s \rightarrow p_k/t$ é utilizada para encontrar as constantes de integração A_i e B_i do problema (6) e junto com os valores de A_k para encontrar $T_i(x,t)$. É necessário portanto inverter a matriz 8 vezes para qualquer x ou t procurado diretamente, independente de incremento nestas variáveis.

MÉTODO NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

Emprega-se o Método dos Volumes Finitos, conforme descrito por Patankar, 1980. Neste método o domínio de cálculo é discretizado sob a forma de volumes de controle, integrando-se a equação diferencial que descreve o fenômeno estudado ao longo de cada um destes volumes. A equação diferencial é também integrada ao longo de um intervalo de tempo Δt , obtendo-se assim um sistema de equações lineares algébricas, uma para cada volume da malha, a ser resolvido.

Integrando então a equação da condução transiente de calor, em uma dimensão, com o termo fonte S , no volume de controle mostrado na figura 3, e ao longo do intervalo de tempo Δt ,

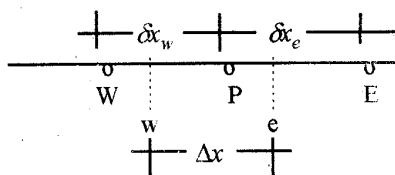


Figura 3: Volume de controle para integração

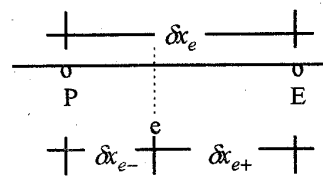


Figura 4: Interface entre dois volumes de controle

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dx dt \quad (9)$$

$$\rho c \Delta x \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) dt + S \Delta x \Delta t \quad (10)$$

onde \bar{S} é o termo fonte associado ao volume de controle considerado, ao longo do intervalo de tempo Δt .

Para a avaliação das derivadas da temperatura nas faces "e" e "w" do volume de controle é necessário assumir uma função de interpolação entre o ponto "P", que representa o centro do volume em questão, e seus vizinhos. Adotando um perfil linear de temperaturas tem-se

$$\rho c \Delta x \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(k_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w} \right) dt + \bar{S} \Delta x \Delta t \quad (11)$$

Integrando agora no tempo e avaliando as diferenças de temperatura, que constam no lado direito da equação, no final do intervalo de tempo Δt , ou seja, no tempo $t + \Delta t$ (esquema totalmente implícito), tem-se

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} (T_P - T_P^o) = k_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S} \Delta x \quad (12)$$

onde o superíndice "o" refere-se ao valor da temperatura do ponto "P" no tempo t.

Linearizando o termo fonte \bar{S} da seguinte forma, $\bar{S} = S_C + S_P T_P$, a equação (12) pode ser assim rescrita

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (13)$$

$$\text{onde} \quad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} \quad a_P^o = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \quad (14)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_P^o - S_P \Delta x \quad b = S_C \Delta x + a_P^o T_P^o$$

Observe-se que nestes coeficientes figura a condutividade térmica do meio nas faces dos volumes de controle. Quando o meio é homogêneo, e não for considerada a variação da sua condutividade com a temperatura, tem-se um valor constante. Entretanto neste trabalho propõe-se resolver meios multicompostos, onde comumente as propriedades físicas variam de meio para meio.

Supondo então que a interface entre dois meios distintos coincida com a interface entre dois volumes de controle, conforme mostrado na figura 4, e aplicando o princípio físico da continuidade do fluxo térmico através da interface, obtêm-se

$$k_e = \left(\frac{1 - f_e}{k_P} + \frac{f_e}{k_E} \right)^{-1} \quad \text{onde} \quad f_e = \frac{\delta x_{e+}}{\delta x_e} \quad (15)$$

Em outras palavras trata-se da média harmônica das condutividades térmicas de cada meio com o posicionamento relativo da interface.

A integração da equação diferencial num volume de controle, e ao longo de um intervalo de tempo Δt , gerou uma equação algébrica linear para este volume de controle. Este procedimento da origem portanto a um sistema de equações algébricas, sendo uma equação para cada volume da malha de volumes que discretiza o domínio de solução.

A evolução das temperaturas no interior da parede é então calculada resolvendo-se o sistema de equações algébricas a cada passo de tempo. As condições de contorno, inclusive a da face externa, que é transiente, são incorporadas nos volumes de controle das fronteiras.

CASO RESOLVIDO E DISCUSSÃO

Para avaliar o comportamento deste método foi resolvido o problema constante na ASHRAE, 1989, ali resolvido pelo Método da Função de Transferência. Seja uma parede multicomposta (figura 2) de cor clara construída com 25 mm estuque ($k = 0,692 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\alpha = 4,434\text{E-}7 \text{ m}^2/\text{s}$), 100 mm concreto pesado ($k = 1,731$, $\alpha = 9,187\text{E-}7$), 25 mm isolante ($k = 0,043$, $\alpha = 1,6\text{E-}6$), 20 mm reboco ($k = 0,727$, $\alpha = 5,4\text{E-}7$), e coeficientes de convecção externo e interno de 16,95 e 8,26 $\text{W}/^\circ\text{Cm}^2$, respectivamente. Não há resistência térmica de contato entre as camadas. A temperatura interna da sala é mantida constante, igual à 24 °C. O fluxo foi calculado através de 1 m² de parede oeste. A temperatura externa evolui como função horária com ciclo de um dia, segundo a temperatura sol-ar que consta na ASHRAE, 1989, para 40° de latitude norte, 21 de julho, $\alpha/\text{ho} = 0,026$. Considera-se que estes valores repetem-se consecutivamente de modo a permitir que o sistema entre em regime periódico (não ocorre nebulosidade atmosférica).

O método analítico exige uma função contínua sobre as 24 horas do dia. Por isso foi ajustado um polinômio de grau dez para representar a temperatura sol-ar. O ajuste desta função foi realizado pelo método dos mínimos quadrados.

O problema também exige a definição de uma condição inicial. Para o primeiro dia foi considerado que toda a parede estivesse na temperatura interna. Nos dias subsequentes foram encontradas as temperaturas internas da parede às 24 hs, ajustadas equações de retas para esta distribuição, e tomadas estas equações como a condição inicial para o dia seguinte. Observa-se que para a parede em análise, especialmente em relação ao concreto pesado, e por estar a parede às 24 hs perdendo calor para os dois lados, o ajuste da condição inicial por retas introduz uma pequena diferença em tempo real de temperaturas e a distribuição considerada. Conforme fica demonstrado mais adiante o erro introduzido por esta prática é muito pequeno, podendo mesmo assim ainda ser reduzido ajustando-se o campo de temperaturas por equações quadráticas.

A tabela 1 apresenta o fluxo de calor na face interna da parede ao longo de um dia, após ser atingido o regime periódico, calculado pelos métodos numéricos da Função de Transferência e dos Volumes Finitos, e pela metodologia analítica proposta neste trabalho.

Tabela 1; Fluxo térmico na face interna da parede ao longo de um dia

Horário	Função de Transferência	Volumes Finitos	Metodologia Analítica Proposta
[h]	[W/m ²]	[W/m ²]	[W/m ²]
1	11,631	11,666	11,818
2	9,985	10,026	10,028
3	8,502	8,544	8,493
4	7,189	7,212	7,263
5	6,003	6,019	6,076
6	4,946	4,983	4,889
7	4,069	4,150	3,911
8	3,461	3,576	3,342
9	3,197	3,320	3,212
10	3,293	3,421	3,402
11	3,744	3,888	3,793
12	4,513	4,690	4,396
13	5,574	5,823	5,393
14	7,153	7,533	7,030
15	9,488	9,943	9,451
16	12,432	12,868	12,531
17	15,582	15,930	15,819
18	18,397	18,607	18,635
19	20,249	20,225	20,314
20	20,380	20,178	20,498
21	19,005	18,890	19,327
22	17,142	17,122	17,393
23	15,232	15,255	15,387
24	13,388	13,424	13,613

CONCLUSÕES

A metodologia analítica proposta apresenta bons resultados, devendo-se observar que as pequenas discrepâncias em relação aos métodos numéricos devem-se provavelmente às aproximações já comentadas na representação analítica da temperatura sol-ar e no ajuste da condição inicial por retas. Também nos métodos numéricos pode haver alguma imprecisão na discretização da temperatura sol-ar ao longo do tempo.

Atualmente estuda-se a possibilidade de fazer a inversão da Transformada de Laplace também analiticamente. O método deverá ser aplicado às paredes utilizadas nas construções brasileiras, procurando analisar-se os efeitos de distintos materiais, espessuras, cores e orientações destas paredes.

Pretende-se também, em trabalhos próximos, estender o método para duas dimensões transiente.

REFERÊNCIAS

1. ASHRAE. *Handbook of Fundamentals*. ASHRAE, pp.26.18-26.25, 1989.
2. Beyer, P.O. e Vilhena, M.T.M.B. *Fluxo de Calor Transiente em Paredes pela Transformada de Laplace com Inversão Numérica*. XII Congresso Bras. de Eng. Mecânica, pp.609-612, Brasília, Brasil, 1993.
3. Beyer, P.O. e Vilhena, M.T.M.B. *Fluxo de Calor Transiente em Paredes Externas Multicompostas*. V Encontro Nacional de Ciências Térmicas, São Paulo, Brasil, 1994.
4. Heydarian, M. e Mullineaux, N.. *Solution of Parabolic Partial Differential Equations*. Appl. Math. Modelling, 5, pp.448-449, 1981.
5. Mitalas, G.P.. *Calculation of Transient Heat Flow through Walls and Roofs*. ASHRAE Transactions, Vol. 74, Part 2, 1968.
6. Mitalas, G.P.. *Transfer Function Method of Calculating Cooling Loads*. Heat Extraction Rate and Space Temperature, ASHRAE Journal, 14(12), 1972.
7. Özisik, M.N.. *Heat Conduction*. Ed. John Wiley & Sons, 1980.
8. Patankar, S.V.. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York, McGraw Hill, 1980.
9. Stroud, A.H. e Secrest, D.. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall, New Jersey, 1966.